

LUÍS ANTÓNIO DE ALMEIDA VIEIRA

CÁLCULO INTEGRAL

INTEGRAÇÃO

POR **SUBSTITUIÇÃO,**

POR **PARTES E**

POR **COMPLEXIFICAÇÃO**

AUTOR

Luís António de Almeida Vieira

TÍTULO

Cálculo Integral – Integração por substituição, por partes e por complexificação

EDIÇÃO

Publindústria, Edições Técnicas

Praça da Corujeira n.º 38 · 4300-144 PORTO

www.publindustria.pt

DISTRIBUIÇÃO

Engebook – Conteúdos de Engenharia e Gestão

Tel. 220 104 872 · Fax 220 104 871 · E-mail: apoiocliente@engebook.com · www.engebook.com

REVISÃO

Publindústria, Produção de Comunicação, Lda.

DESIGN DE CAPA

Luciano Carvalho

Publindústria, Produção de Comunicação, Lda.



A **cópia ilegal** viola os direitos dos autores.

Os prejudicados somos todos nós.

Copyright © Dezembro 2017 | Publindústria, Produção de Comunicação, Lda.

Todos os direitos reservados a Publindústria, Produção de Comunicação, Lda. para a língua portuguesa.

A reprodução desta obra, no todo ou em parte, por fotocópia ou qualquer outro meio, seja eletrónico, mecânico ou outros, sem prévia autorização escrita do Editor, é ilícita e passível de procedimento judicial contra o infrator.

Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida, no todo ou em parte, sob qualquer forma ou meio, seja eletrónico, mecânico, de fotocópia, de gravação ou outros sem autorização prévia por escrito do autor.

Este livro encontra-se em conformidade com o novo Acordo Ortográfico de 1990, respeitando as suas indicações genéricas e assumindo algumas opções específicas.

CDU

51 Matemática

517 Análise Matemática

ISBN

E-book: 978-989-723-269-5

Engebook – Catalogação da publicação

Família: Bases de Engenharia

Subfamília: Matemática

Conteúdo

Dedicatória	5
Agradecimentos	7
Prefácio	9
1 Integração Simples	11
1.1 Introdução ao Conceito de Integral Indefinido	11
1.1.1 Tabela de Primitivas Imediatas em x e em u	13
1.1.2 Algumas Propriedades do Integral Indefinido	14
2 Método de Substituição	33
2.1 Introdução à Integração por Substituição	33
3 Integração por Partes	45
3.1 Breves Fundamentos sobre Integração por Partes	45
3.2 Fórmulas de Recorrência	62
3.3 Fórmula Generalizada de Integração por Partes	81
3.4 Método dos Coeficientes Indeterminados	82

4	Substituição e Integração por Partes	89
4.1	Substituição e Integração por Partes, Exemplos	89
5	Integrais de algumas Funções Trigonômicas	93
5.1	Breve Introdução	93
5.2	Integrais do Tipo $\int \text{sen}^m(x) \cos^n(x) dx$	93
5.2.1	Estratégia para Desenvolver $\int \text{sen}^m(x) \cos^n(x) dx$	97
5.3	Integrais do Tipo $\int \text{tg}^m(x) \sec^n(x) dx$	99
5.3.1	Estratégia para Integrais do Tipo $\int \text{tg}^m(x) \sec^n(x) dx$	101
5.4	Integrais do Tipo $\int \text{cosec}^m(x) \cotg^n dx$	103
5.4.1	Estratégia para os Integrais do Tipo $\int \text{cosec}^m(x) \cotg^n(x) dx$	107
6	Integração Recorrendo aos Complexos	109
6.1	Exemplos de Desenvolvimento de Integrais por Complexificação	109
7	Exercícios Propostos	125
8	Soluções dos Exercícios do Capítulo 7	131
9	Apêndice	135

Dedicatória

Dedico este livro a toda a minha família, essencialmente a todos os meus irmãos, e à minha querida mãe Maria Arménia de Almeida Vieira, e dedico-o também a título póstumo ao meu irmão Carlos Manuel Chaves Espain de Oliveira e ao meu pai Carlos Espain Neves de Oliveira, que era, durante muito anos, o único autor de livros de Integração.

Agradecimentos

Agradeço a disponibilidade da Secção de Matemática do Departamento de Engenharia Civil da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto (FEUP) no fornecimento de meios informáticos para que este trabalho fosse possível, e em particular ao Director do Departamento de Engenharia Civil, o Prof. António da Silva Cardoso.

Finalmente agradeço quer ao Departamento de Engenharia Civil, quer ao Departamento de Engenharia de Minas, quer ao Departamento de Engenharia Química, pelo apoio dado durante os anos em que fui regente de das disciplinas de Análise Matemática I e Análise Matemática II.

Prefácio

Este livro apresenta um conjunto de exercícios que o autor formulou em diversas provas no decorrer da sua atividade letiva, quer como docente do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro (UA), quer como docente da Secção de Matemática e Física do Departamento de Engenharia Civil da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto (FEUP).

Pretende-se que este livro sirva como uma boa ferramenta de apoio aos alunos dos primeiros anos de Engenharia, e, de um modo geral, que contribua para que as matérias lecionadas nas disciplinas de Matemática se tornem mais atrativas, e que se conclua a necessidade da Matemática no desenvolvimento científico dos alunos de Engenharia.

Estes objectivos são exemplificados pela preparação do livro tendo em conta o trabalho com os meus alunos do primeiro ano, quer do Departamento de Engenharia Química, quer do Departamento de Engenharia de Minas, quer do Departamento de Engenharia Civil, em especial os alunos de Análise Matemática I do ano letivo de 2017/2018 da Licenciatura em Ciências de Engenharia - Engenharia de Minas e de Geo-Ambiente (LCEEMG) da FEUP. Muito deste trabalho é inspirado nos livros de Integração de Carlos Espain Neves de Oliveira (cf. Bibliografia [6] e [7]), meu pai, nos livros de

Cálculo de N. Piskounov (cf. Bibliografia [9]), e no meu trabalho de investigação decorrente da docência de Análise Matemática I, Análise Matemática II e Análise Matemática VI (cf. Bibliografia [13]).

1 Integração Simples

Neste capítulo vamos apresentar apenas integrais indefinidos de funções muito simples.

Vamos começar por definir a primitiva de uma função real de variável real, em seguida apresentamos uma Tabela de Primitivas.

1.1 Introdução ao Conceito de Integral Indefinido

Definição 1.1.1. *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, tal¹ que $\overset{\circ}{D} \neq \emptyset$. Uma função F diz-se uma primitiva de f se e só se $\forall x \in \overset{\circ}{D}, F'(x) = f(x)$.*

Observação 1.1.1. *Mas se F e G são primitivas de f onde f está definida num intervalo aberto I então $F'(x) = G'(x) = f(x)$. E portanto $G(x) = F(x) + C$. Isto é qualquer primitiva de f é da forma $F(x) + C$. A operação que nos permite obter todas as primitivas de uma função real de variável real chama-se integração. Assim passaremos a representar o conjunto de todas as primitivas de uma função real de variável real por $\int f(x)dx$ e passamos a dizer que $\int f(x)dx$ é o integral indefinido de f . Para desenvolver um integral indefinido de uma função real de variável real f , basta*

¹Diz-se que x é um ponto interior de um conjunto D , se e só se $\exists \delta > 0,]a - \delta, a + \delta[\subset D$. O conjunto dos pontos interiores a D denota-se por $\overset{\circ}{D}$

h)

$$\begin{aligned}\int (1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x}) dx &= \int (1 - x) dx \\ &= \int 1 dx - \int x dx \\ &= x - \frac{x^2}{2} + C;\end{aligned}$$

i) Para desenvolver o integral $I = \int \frac{1}{e^x+1} dx$ basta fazer um pequeno truque para escrever a função integranda de I como a soma de duas funções primitiváveis.

Assim, tem-se

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{e^x+1} dx &= \int \frac{1+e^x-e^x}{e^x+1} dx \\ &= \int \frac{e^x+1}{e^x+1} dx - \int \frac{e^x}{e^x+1} dx \\ &= \int 1 dx - \int \frac{e^x}{e^x+1} dx \\ &= x - \ln(e^x+1) + C;\end{aligned}$$

j) Decompondo o integral $I = \int \left(\frac{1}{x^2} + x + 3 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$ como uma soma de integrais indefinidos, obtém-se

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{1}{x^2} + x + 3 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx &= \\ &= \int \frac{1}{x^2} dx + \int x dx + \int 3 dx - \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \int x^{-2} dx + \frac{x^2}{2} + 3x - \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx \\ &= \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^2}{2} + 3x - \int x^{-\frac{1}{2}} dx\end{aligned}$$

m) Decompondo o integral indefinido $I = \int \frac{x+1}{x^2+1} dx$ numa soma de dois integrais indefinidos obtemos

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^2+1} dx &= \int \frac{x}{x^2+1} dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \operatorname{arctg}(x) \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \operatorname{arctg}(x) + C; \end{aligned}$$

n) Nesta alínea, para decompor o integral $I = \int \frac{x+3}{(x+2)^4} dx$, como uma soma de dois integrais indefinidos cujas primitivas sejam quase imediatas, procedemos tal como nos cálculos que se apresentam já de seguida.

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{(x+2)^4} dx &= \int \frac{x+2+1}{(x+2)^4} dx \\ &= \int \frac{x+2}{(x+2)^4} dx + \int \frac{1}{(x+2)^4} dx \\ &= \int \frac{1}{(x+2)^3} dx + \int (x+2)^{-4} dx \\ &= \int (x+2)^{-3} dx + \frac{(x+2)^{-3}}{-3} + C \\ &= \frac{(x+2)^{-3+1}}{-3+1} + \frac{(x+2)^{-3}}{-3} + C \\ &= \frac{(x+2)^{-2}}{-2} - \frac{1}{3(x+2)^3} + C \\ &= -\frac{1}{2(x+2)^2} - \frac{1}{3(x+2)^3} + C; \end{aligned}$$

o) Desenvolvendo o integral indefinido $I = \int \frac{x+1}{\sqrt{3x+1}} dx$ em integrais indefinidos

Resolução 1.1.2.

a) *Tem-se*

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \int \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{(x+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} dx \\ &= \int \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}} dx \\ &= \int \frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}} + 1 dx \\ &= \int \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} dx \end{aligned}$$

$$\text{Note-se que } \frac{d}{dx}(x + \sqrt{1+x^2}) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \ln |x + \sqrt{1+x^2}| + C.$$

b) *Para relacionarmos este integral com a Tabela de integração 1.1.1 temos de lembrar que $(\sec(x))' = \sec(x)\operatorname{tg}(x)$ e que $(\operatorname{tg}(x))' = \sec^2(x)$.*

$$\begin{aligned} \int \sec(x) dx &= \int \sec(x) \frac{\sec(x)+\operatorname{tg}(x)}{\sec(x)+\operatorname{tg}(x)} dx = \int \frac{\sec^2(x)+\sec(x)\operatorname{tg}(x)}{\sec(x)+\operatorname{tg}(x)} dx \\ &= \int \frac{\sec(x)\operatorname{tg}(x)+\sec^2(x)}{\sec(x)+\operatorname{tg}(x)} dx = \int \frac{(\sec(x)+\operatorname{tg}(x))'}{\sec(x)+\operatorname{tg}(x)} dx \\ &= \ln |\sec(x) + \operatorname{tg}(x)| + C. \end{aligned}$$

c) *Para desenvolver o integral $I = \int \operatorname{cosec}(x) dx$ vamos em primeiro lugar utilizar a fórmula de trigonometria $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$ e depois vamos reescrever a função integranda de I de modo a que possamos aplicar a regra $\int \frac{u'}{u} dx = \ln |u| + C$. Assim, vem*

$$\begin{aligned} \int \operatorname{cosec}(x) dx &= \int \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} dx = \int \frac{1}{2\operatorname{sen}(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})} dx \\ &= \int \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2(\frac{x}{2})}}{\operatorname{tg}(\frac{x}{2})} dx = \int \frac{(\operatorname{tg}(\frac{x}{2}))'}{\operatorname{tg}(\frac{x}{2})} dx \\ &= \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \right| + C. \end{aligned}$$

Apresentamos agora um conjunto de exercícios e a sua resolução, mas o objectivo

2 Método de Substituição

2.1 Introdução à Integração por Substituição

Um integral da forma $\int g(f(x))f'(x)dx$ pode ser escrito na forma $\int g(u)du$ fazendo $u = f(x)$ e $du = f'(x)dx$. Por sua vez, se G é uma primitiva de g , note-se que $G'(u) = g(u)$, então $G \circ f(x)$ é uma primitiva de $g(f(x))f'(x)$. Pois

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(G \circ f(x)) &= G'(f(x))f'(x) \\ &\stackrel{G'=g}{=} g(f(x))f'(x)\end{aligned}$$

Assim

$$\int g(f(x))f'(x)dx = \int \frac{d}{dx}(G \circ f(x))dx = G \circ f(x) + C.$$

Note-se que podemos chegar ao mesmo, resultado se calcularmos

$$\int g(u)du$$

e depois substituímos u por $f(x)$. Assim, escrevemos $\int g(u)du = G(u)|_{u=f(x)} + C = G(f(x)) + C$.

f) Para desenvolver o integral $I = \int \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$, consideramos a mudança $x + 1 = t^2$, $x = t^2 - 1$, $t = \sqrt{1+x}$ e $dx = 2t dt$. Assim, vem

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx &= \int \frac{t}{t^2-1} (2t) dt \\
 &= \int \frac{2t^2}{t^2-1} dt \\
 &= 2 \int \frac{t^2}{t^2-1} dt \\
 &= 2 \int \frac{t^2-1+1}{t^2-1} dt \\
 &= 2 \int \left(\frac{t^2-1}{t^2-1} + \frac{1}{t^2-1} \right) dt \\
 &= 2 \int 1 dt + 2 \int \frac{1}{t^2-1} dt \\
 &= 2t|_{t=\sqrt{1+x}} + 2 \int \frac{1}{(t-1)(t+1)} dt \\
 &= 2\sqrt{1+x} + 2 \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{t-1} - \frac{\frac{1}{2}}{t+1} \right) dt \\
 &= 2\sqrt{1+x} + \int \frac{1}{t-1} dt - \int \frac{1}{t+1} dt \\
 &= 2\sqrt{1+x} + \ln|t-1|_{t=\sqrt{1+x}} - \ln|t+1|_{t=\sqrt{1+x}} + C \\
 &= 2\sqrt{1+x} + \ln|\sqrt{1+x}-1| - \ln(\sqrt{1+x}+1) + C \\
 &= 2\sqrt{1+x} + \ln \left| \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1} \right| + C;
 \end{aligned}$$

g) Para eliminar as raízes que surgem no integral $I = \int \frac{(2x-1)^{\frac{1}{2}} dx}{(2x-1)^{\frac{1}{3}}+1}$ fazemos a mudança $2x-1 = t^6$, $x = \frac{t^6+1}{2}$ e $dx = 3t^5 dt$. Assim, tem-se

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{(2x-1)^{\frac{1}{2}}}{(2x-1)^{\frac{1}{3}}+1} dx = \int \frac{t^3}{t^2+1} 3t^5 dt \\
 &= 3 \int \frac{t^8}{t^2+1} dt \\
 &= 3 \int \left(t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1} \right) dt
 \end{aligned}$$

3 Integração por Partes

3.1 Breves Fundamentos sobre Integração por Partes

Teorema 3.1.1. *{ Regra de Integração por partes }*

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Demonstração. Tem-se

$$(fg)' = f'g + fg' \tag{3.1}$$

Integrando ambos os membros da igualdade (3.1) obtemos (3.2)

$$\int (fg)' dx = \int (f'g + fg') dx, \tag{3.2}$$

ou seja, verificamos que

$$fg = \int f'g dx + \int fg' dx, \tag{3.3}$$

Mas então, reescrevendo o segundo membro de (3.12) obtemos (3.13).

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx + \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx, \quad (3.13)$$

ou seja

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{(\sqrt{1+x^2})^2}{\sqrt{1+x^2}} dx + \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx,$$

e portanto

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2} dx + \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx. \quad (3.14)$$

Reescrevendo a equação (3.14) obtemos a igualdade (3.15)

$$2 \int \sqrt{1+x^2} dx = x\sqrt{1+x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx. \quad (3.15)$$

Agora, temos de fazer a observação ¹ que $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$, e portanto tem-se (3.16),

$$2 \int \sqrt{1+x^2} dx = x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2}). \quad (3.16)$$

¹Note-se que

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \int \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{(x + \sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2})} dx \\ &= \int \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}} dx \\ &= \int \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} dx \\ &= \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C. \end{aligned}$$

Observe-se que $\frac{d}{dx}(\sqrt{1+x^2}) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

ou seja

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{2} + C;$$

c) Para determinarmos $I = \int \frac{1}{(a^2+x^2)^2} dx$ considerem-se os seguintes cálculos.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(a^2+x^2)^2} dx &= \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2}{(a^2+x^2)^2} dx \\ &= \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2+x^2-x^2}{(a^2+x^2)^2} dx \\ &= \frac{1}{a^2} \int \frac{(a^2+x^2)-x^2}{(a^2+x^2)^2} dx \\ &= \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2+x^2}{(a^2+x^2)^2} dx - \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^2} dx \\ &= \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{a^2+x^2} dx - \frac{1}{a^2} \int \frac{x \cdot x}{(a^2+x^2)^2} dx \\ &= \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{a^2(1+\frac{x^2}{a^2})} dx - \\ &\quad - \frac{1}{a^2} \int x * (x(a^2+x^2)^{-2}) dx. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Agora, integrando por partes o integral $\int x(x(a^2+x^2)^{-2}) dx$ em (3.17) concluímos que

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(a^2+x^2)^2} dx &= \frac{1}{a^3} \int \frac{\frac{1}{a}}{(1+\frac{x^2}{a^2})} dx - \\ &\quad - \frac{1}{2a^2} \int x * (2x(a^2+x^2)^{-2}) dx \\ &= \frac{1}{a^3} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2a^2} \left(x \frac{(a^2+x^2)^{-1}}{-1} - \int \frac{(a^2+x^2)^{-1}}{-1} dx \right) \\ &= \frac{1}{a^3} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a} \right) - \end{aligned}$$

potência de x foi eliminada por um processo de derivação. Assim, tem-se

$$\begin{aligned}
 \int x^2 \operatorname{sen}(x) dx &= x^2(-\cos(x)) - \int (-\cos(x))2x dx \\
 &= -x^2 \cos(x) + 2 \int x \cos(x) dx \\
 &= -x^2 \cos(x) + 2(\operatorname{sen}(x)x - \int \operatorname{sen}(x)1 dx) \\
 &= -x^2 \cos(x) + 2\operatorname{sen}(x)x - 2 \int \operatorname{sen}(x) dx \\
 &= -x^2 \cos(x) + 2\operatorname{sen}(x)x - 2(-\cos(x)) + C \\
 &= -x^2 \cos(x) + 2\operatorname{sen}(x)x + 2 \cos(x) + C.
 \end{aligned}$$

3.2 Fórmulas de Recorrência

Observação 3.2.1. *O objectivo dos exercícios apresentados nesta secção é transmitir a ideia que para estabelecermos uma fórmula acerca de um integral I_n temos que muitas vezes rearranjar a função integranda do integral para que depois, após integrarmos por partes, seja possível fazer reaparecer um integral do mesmo tipo I_k , com k menor ou igual n . Mas muitas vezes, podemos após integrarmos o integral I_n por partes fazer surgir o integral I_n mas com um coeficiente negativo. Apresentamos no exercício 3.2.1 várias fórmulas de recorrência sobre alguns integrais I_n que muitas vezes nos surgem quando estamos a desenvolver integrais.*

Exercício 3.2.1. *Mostre que*

a)

$$\begin{aligned}
 \int \sec^n(x) dx &= \frac{\sec^{n-2}(x)}{n-1} \operatorname{tg}(x) + \\
 &+ \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2}(x) dx, \forall n \in \mathbb{N} + 1. \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

membro desta igualdade obtemos

$$\int \sec^n(x) dx + \frac{1}{n-2} \int \sec^n(x) dx = \int \sec^{n-2}(x) dx + \frac{\sec^{n-2}(x)}{n-2} \operatorname{tg}(x). \quad (3.34)$$

Assim, vem

$$\frac{n-1}{n-2} \int \sec^n(x) dx = \int \sec^{n-2}(x) dx + \frac{\sec^{n-2}(x)}{n-2} \operatorname{tg}(x). \quad (3.35)$$

E portanto, multiplicando ambos os membros de (3.35) por $\frac{n-2}{n-1}$ obtemos (3.36).

$$\int \sec^n(x) dx = \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2}(x) dx + \frac{\sec^{n-2}(x)}{n-1} \operatorname{tg}(x). \quad (3.36)$$

Ou seja, obtemos

$$\int \sec^n(x) dx = \frac{\sec^{n-2}(x)}{n-1} \operatorname{tg}(x) + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2}(x) dx. \quad (3.37)$$

Tal como pretendíamos.

- b) Nesta alínea para desenvolvermos o integral $\int \exp(x) \operatorname{sen}^n(x) dx$ temos de recordar que sempre pretendemos primitivar o produto de duas funções e uma delas é a exponencial, então começamos por determinar a primitiva da exponencial. Por sua vez, como quero que no segundo membro surja $\int \exp(x) \operatorname{sen}^{(n-2)}(x) dx$ é natural pensarmos em aplicar a primitivação por partes duas vezes ao integral

Finalmente, tem-se

$$\int \operatorname{cosec}^n(x) dx = \frac{n-2}{n-1} \int \operatorname{cosec}^{n-2}(x) dx - \frac{\operatorname{cosec}^{n-2}(x) \cot g(x)}{n-1} + C.$$

Exercício 3.2.2. Sabendo que

$$\begin{aligned} \int \sec^n(x) dx &= \frac{\sec^{n-2}(x)}{n-1} \operatorname{tg}(x) + \\ &+ \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2}(x) dx, \forall n \in \mathbb{N} + 1, \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} \int \exp(x) \operatorname{sen}^n(x) dx &= \frac{\exp(x)}{1+n^2} \operatorname{sen}^{n-1}(x) (\operatorname{sen}(x) - \cos(x)) + \\ &+ \frac{n(n-1)}{1+n^2} \int e^x \operatorname{sen}^{n-2}(x) dx, \forall n \in \mathbb{N} + 1, \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^n(x) dx &= -\frac{1}{n} \cos(x) \operatorname{sen}^{n-1}(x) + \\ &+ \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2}(x) dx, \forall n \in \mathbb{N} + 1, \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \int \cos^n(x) dx &= \frac{\cos^{n-1}(x) \operatorname{sen}(x)}{n} + \\ &+ \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2}(x) dx, \forall n \in \mathbb{N} + 1, \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\int \operatorname{tg}^n(x) dx = \frac{1}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1}(x) - \int \operatorname{tg}^{n-2}(x) dx, \forall n \in \mathbb{N}; \quad (3.54)$$

$$\int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx, \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} &= \frac{x}{2(n-1)a^2(x^2 + a^2)^{n-1}} + \\ &+ \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N} + 1, \end{aligned} \quad (3.56)$$

calcule os seguintes

a) $\int \sec^4(x) dx;$

b) $\int \exp(x) \operatorname{sen}^2(x) dx;$

ou seja

$$\int tg^4(x)dx = \frac{1}{3}tg^3(x) - \int tg^2(x)dx,$$

Por (3.54) para $n = 2$, obtemos

$$\int tg^4(x)dx = \frac{1}{3}tg^3(x) - (tg(x) - x) + C,$$

Finalmente, tem-se

$$\int tg^4(x)dx = \frac{1}{3}tg^3(x) - tg(x) + x + C.$$

f) Por (3.55), considerando $n = 2$, concluímos que

$$\int x^2 e^x dx = e^x x^2 - 2 \int e^x x dx.$$

Por (3.55) considerando $n = 1$, deduzimos que

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= e^x x^2 - 2(e^x x - \int e^x dx) \\ &= e^x x^2 - 2e^x x + 2 \int e^x dx \\ &= e^x x^2 - 2e^x x + 2e^x + C. \end{aligned}$$

Logo, mostramos que $\int x^2 e^x dx = e^x x^2 - 2e^x x + 2e^x + C$;

g) Por (3.56) temos que

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^3} = \frac{x}{2(3-1)a^2(x^2 + a^2)^{3-1}} + \frac{2*3-3}{2(3-1)a^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3-1}}.$$

$$\int p_n e^{ax} dx = e^{ax} \left(\frac{p_n(x)}{a} - \frac{p_n^{(1)}(x)}{a^2} + \dots + \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} p^{(n)}(x) \right) + C.$$

Exercício 3.3.1. Utilize o método generalizado de integração por partes para desenvolver o integral:

$$\int (x^3 + x^2 + x + 1) \operatorname{sen}(x) dx;$$

Resolução 3.3.1.

$$\begin{aligned} \int (x^3 + x^2 + x + 1) \operatorname{sen}(x) dx &= (x^3 + x^2 + x + 1) \operatorname{sen}(x) - (3x^2 + 2x)(-\cos(x)) + \\ &+ (6x)(-\sin(x)) - \int (6(-\operatorname{sen}(x))) dx \\ &= (x^3 + 3x^2 + x + 1) \operatorname{sen}(x) + (3x^2 + 2x) \cos(x) - 6x \operatorname{sen}(x) - 6 \cos(x) + C. \end{aligned}$$

3.4 Método dos Coeficientes Indeterminados

Quando temos integrais que conseguimos prever a forma da primitiva de um integral a menos de constantes, então nesse caso podemos descobrir o desenvolvimento do integral muitas vezes utilizando o processo do método dos coeficientes indeterminados. Já quando temos, integrais indefinidos da forma $\int p_n(x)e^x dx$, $\int q_n(x)\operatorname{sen}(x)dx$ e $\int t_n(x)\cos(x)dx$ nós conseguimos prever que para cada um dos integrais envolvidos as primitivas também são produtos de polinômios de ordem n multiplicados ora por e^x ora por $\operatorname{sen}(x)$, ou por $\cos(x)$ respectivamente.

Exercício 3.4.1. Desenvolva os seguintes integrais:

a) $\int \exp(x)x \cos(x) dx$

b) $\int (2x + 1)e^x dx;$

4 Substituição e Integração por Partes

4.1 Substituição e Integração por Partes, Exemplos

Muitas vezes para desenvolver um integral indefinido, temos de recorrer primeiro a uma mudança de variável para transformar o cálculo de um integral no cálculo de outro integral onde seja mais fácil utilizar a integração por partes. Os próximos problemas com solução que apresentamos servem para reforçar a ideia.

Exercício 4.1.1. *Desenvolva os seguintes integrais indefinidos:*

a) $\int \operatorname{arctg}(\sqrt{x})dx;$

b) $\int \operatorname{sen}(\ln(x))dx;$

c) $\int \operatorname{arctg}(\sqrt{2+x})dx.$

5 Integrais de algumas Funções

Trigonométricas

5.1 Breve Introdução

Neste capítulo pretendemos mostrar que para desenvolver alguns integrais indefinidos $\int f(x)dx$ onde f é um produto de potências de expoente naturais de funções trigonométricas seno e cosseno, ou de potências da tangente e da secante, ou o produto de potências da cotangente e da cosecante, podemos fazer uma mudança de variável tal que $\int f(x)dx = \int p(u)du$ onde p é um polinómio em u . Começamos por apresentar exercícios resolvidos e depois apresentamos estratégias para desenvolver cada tipo de integrais.

5.2 Integrais do Tipo $\int \operatorname{sen}^m(x) \cos^n(x)dx$.

Nesta seção vamos tratar de estabelecer estratégias para desenvolver integrais indefinidos do tipo $\int \operatorname{sen}^m(x) \cos^n(x)dx$ sendo m e n números naturais.

Exercício 5.2.1. *Obtenha os seguintes integrais*

6 Integração Recorrendo aos Complexos

6.1 Exemplos de Desenvolvimento de Integrais por Complexificação

Alguns dos exercícios deste capítulo fazem parte do capítulo *Integration of Indefinite Integrals Recurring to Complexes Analysis* do livro *Techniques of Integration* (cf, bibliografia [13]).

Neste capítulo vamos utilizar a igualdade $\int (f(x) + ig(x))dx = \int f(x)dx + i \int g(x)dx$ e mais algumas propriedades dos complexos.

Para desenvolvermos certos integrais, tais como por exemplo os integrais do tipo 1 até os integrais do tipo 12

- 1• $\int e^x \operatorname{sen}(x)dx,$
- 2• $\int e^x \operatorname{sen}(x) \cos(x)dx,$
- 3• $\int \cos(2x) \cos(3x)dx,$

tal sucede. Devemos aqui também dizer, que a resolução dos integrais antes desta observação apenas exige o conhecimento das fórmulas $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ e $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$. Mas, algumas vezes, quando a função integranda é uma função envolvendo senos e cossenos então o problema de desenvolver tais integrais pode exigir algum volume de cálculo é o que mostraremos na resolução dos próximos integrais.

Exercício 6.1.2. Desenvolva os seguintes integrais.

a) $\int \frac{1}{1+\cos(x)} dx$

b) $\int \frac{1}{\sin^3(x)} dx;$

c) $\int \frac{1}{\sin(x)} dx.$

Resolução 6.1.2.

a) Tem-se

$$\int \frac{1}{1+\cos(x)} dx = \operatorname{Im} \int \frac{i}{1+\cos(x)} dx.$$

Agora, considerando a igualdade $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ e, $u = e^{ix}$ e portanto $du = e^{ix} i dx$ obtemos

$$\begin{aligned} \int \frac{i}{1+\cos(x)} dx &= \int \frac{i}{1 + \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}} dx = \int \frac{i}{\frac{2e^{ix} + e^{ix} + 1}{2e^{ix}}} dx \\ &= \int \frac{i}{\frac{2e^{ix} + (e^{ix})^2 + 1}{2e^{ix}}} dx = \int \frac{2e^{ix} i}{2e^{ix} + (e^{ix})^2 + 1} dx = \int \frac{2du}{u^2 + 2u + 1} du \\ &= \int \frac{2du}{(u+1)^2} = 2 \int \frac{1}{(u+1)^2} du = 2 \int (u+1)^{-2} du \\ &= \left[2 \frac{(u+1)^{-1}}{-1} \right]_{u=e^{ix}} + C = -\left[\frac{2}{u+1} \right]_{u=e^{ix}} + C = -\frac{2}{e^{ix} + 1} + C \\ &= -\frac{2}{\cos(x) + i\sin(x) + 1} + C = -\frac{2}{(\cos(x)+1) + i\sin(x)} + C = -\frac{2(\cos(x)+1) - 2i\sin(x)}{(\cos(x)+1)^2 + \sin^2(x)} + C \\ &= -\frac{2(\cos(x)+1) - 2i\sin(x)}{\cos^2(x) + 2\cos(x) + 1 + \sin^2(x)} + C = -\frac{2(\cos(x)+1)}{2(1+\cos(x))} + i \frac{2\sin(x)}{2(1+\cos(x))} + C \\ &= -1 + i \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} + C. \end{aligned}$$

Visto que $e^{ix} = \cos(x) + i\text{sen}(x)$ então usando (6.4) concluímos que

$$\int \frac{1}{\text{sen}^3(x)} dx = \frac{1}{2} \frac{2(\cos(x) + i\text{sen}(x))(\cos(2x) + i\text{sen}(2x) + 1)}{(\cos(2x) + i\text{sen}(2x) - 1)^2} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos(x) + i\text{sen}(x) + 1}{\cos(x) + i\text{sen}(x) - 1} \right| + C.$$

Assim, deduzimos que

$$\int \frac{1}{\text{sen}^3(x)} dx = \frac{(\cos(x) + i\text{sen}(x))(\cos(2x) + 1 + i\text{sen}(2x))}{(\cos(2x) - 1 + i\text{sen}(2x))^2} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \cos(x) + i\text{sen}(x)}{\cos(x) - 1 + i\text{sen}(x)} \right|.$$

Agora, como $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$, $\text{sen}(2x) = 2\text{sen}(x)\cos(x)$ e $\text{sen}^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$

então deduzimos que

$$\int \frac{1}{\text{sen}^3(x)} dx = \frac{(\cos(x) + i\text{sen}(x))(2\cos^2(x) + i2\text{sen}(x)\cos(x))}{(-2\text{sen}^2(x) + i2\text{sen}(x)\cos(x))^2} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2\cos^2(\frac{x}{2}) + i2\text{sen}(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})}{-2\text{sen}^2(\frac{x}{2}) + i2\text{sen}(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})} \right|.$$

Assim

$$\int \frac{1}{\text{sen}^3(x)} dx = \frac{1}{2} \frac{\cos(x)}{\text{sen}^2(x)} \frac{(\cos(x) + i\text{sen}(x))(\cos(x) + i\text{sen}(x))}{(-\text{sen}(x) + i\cos(x))^2} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos(x/2)}{\text{sen}(x/2)} \frac{\cos(\frac{x}{2}) + i\text{sen}(\frac{x}{2})}{-\text{sen}(\frac{x}{2}) + i\cos(\frac{x}{2})} \right| + C.$$

7 Exercícios Propostos

Integração Imediata

Exercício 7.1. Calcule os seguintes integrais indefinidos I recorrendo a uma tabela de primitivação onde:

$$a) I = \int \frac{\arcsen(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$b) I = \int e^{\sen(x)} \cos(x) dx;$$

$$c) I = \int e^{1+x^2} x dx;$$

$$d) I = \int (1+x^3)^{\frac{1}{2}} x^2 dx;$$

$$e) I = \int \sen^3(x) \cos(x) dx;$$

$$f) I = \int \sqrt[5]{x} dx;$$

$$g) I = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx;$$

$$h) I = \int \frac{\sec^2 x}{\sqrt[3]{\tg(x)}} dx;$$

$$i) I = \int \frac{\cos(x)}{(1+\sen(x))^7} dx;$$

$$j) I = \int \frac{\sqrt[5]{\ln(x)}}{x} dx;$$

$$k) I = \int \frac{x^2}{1+x^6} dx;$$

Integração por Partes

Exercício 7.3. Calcule os seguintes integrais por partes.

$$a) I = \int x \sec^2(x) dx;$$

$$b) I = \int e^x x^2 \operatorname{sen}(x) dx;$$

$$c) I = \int \sqrt[3]{x} \ln(x) dx;$$

$$d) I = \int e^x (x^3 + x^2 + 1) dx;$$

$$e) I = \int (x^2 + x) \sin(x) dx;$$

$$f) I = \int x^3 \operatorname{arctg}(x) dx.$$

Substituição e Integração por Partes

Exercício 7.4. Desenvolva cada integral I utilizando integração por partes, mas caso ache necessário recorra a uma mudança de variável.

$$a) I = \int \operatorname{arctg}(\sqrt[3]{x}) dx;$$

$$b) I = \int x \operatorname{sen}(\ln(x)) dx;$$

$$c) I = \int e^{\sqrt{x}} dx;$$

$$d) I = \int \frac{\operatorname{arcsen}(\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}} dx;$$

$$e) I = \int x^2 \operatorname{sen}(\sqrt{x}) dx;$$

$$f) I = \int \operatorname{tg}(x) \ln(\cos(x)) dx, u = \operatorname{tg}(x);$$

$$g) I = \int (\sqrt{x} - 1)^{\frac{1}{5}} dx;$$

$$h) I = \int \ln^2(x) dx;$$

$$i) I = \int \operatorname{arcsen}\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right) dx.$$

8 Soluções dos Exercícios do Capítulo 7

Solução do Exercício. 7.1

$$a) I = \frac{\operatorname{arcsen}^2(x)}{2} + C;$$

$$b) I = e^{\operatorname{sen}(x)} + C;$$

$$c) I = \frac{1}{2}e^{x^2+1} + C;$$

$$d) I = \frac{2(1+x^3)\sqrt{1+x^3}}{9} + C$$

$$e) I = \frac{\operatorname{sen}^4(x)}{4} + C;$$

$$f) I = \frac{5x\sqrt[5]{x}}{6} + C;$$

$$g) I = \frac{7}{6}\sqrt[7]{x^6} + C;$$

$$h) I = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2(x)} + C;$$

$$i) I = -\frac{1}{6(1+\operatorname{sen}(x))^6} + C;$$

$$j) I = \frac{5}{6}\ln(x)\sqrt[5]{\ln(x)} + C;$$

$$k) I = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}(x^3) + C;$$

$$l) I = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(2x) + C;$$

Fórmulas Trigonométricas Importantes

- 1• $tg(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{cos}(\alpha)}$;
- 2• $\text{cotg}(\alpha) = \frac{\text{cos}(\alpha)}{\text{sen}(\alpha)}$;
- 3• $\text{sec}(\alpha) = \frac{1}{\text{cos}(\alpha)}$;
- 4• $\text{cosec}(\alpha) = \frac{1}{\text{sen}(\alpha)}$;
- 5• $\text{sen}^2(\alpha) + \text{cos}^2(\alpha) = 1$;
- 6• $tg^2(\alpha) + 1 = \text{sec}^2(\alpha)$;
- 7• $\text{cotg}^2(\alpha) + 1 = \text{cosec}^2(\alpha)$;

Tabela de Valores das Funções Trigonométricas

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
<i>sen</i>	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
<i>cos</i>	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
<i>tg</i>	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
<i>cotg</i>	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
<i>sec</i>	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞
<i>cosec</i>	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

Fórmulas Trigonométricas de Adição e Subtração

- 8• $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}(\alpha)\text{cos}(\beta) + \text{sen}(\beta)\text{cos}(\alpha)$;
- 9• $\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}(\alpha)\text{cos}(\beta) - \text{sen}(\beta)\text{cos}(\alpha)$;
- 10• $\text{cos}(\alpha + \beta) = \text{cos}(\alpha)\text{cos}(\beta) - \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta)$;
- 11• $\text{cos}(\alpha - \beta) = \text{cos}(\alpha)\text{cos}(\beta) + \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta)$;

$$39 \bullet \log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a(x) + \log_a(y);$$

$$40 \bullet \log_a(x^n) = n \log_a(x);$$

$$41 \bullet \log_a(x) = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Funções Hiperbólicas

$$42 \bullet \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$

$$43 \bullet \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

$$44 \bullet \operatorname{tgh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}};$$

$$45 \bullet \operatorname{cotgh}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}};$$

$$46 \bullet \operatorname{sech}(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}};$$

$$47 \bullet \operatorname{cosech}(x) = \frac{2}{e^x - e^{-x}}.$$

Gráficos das funções Hiperbólicas

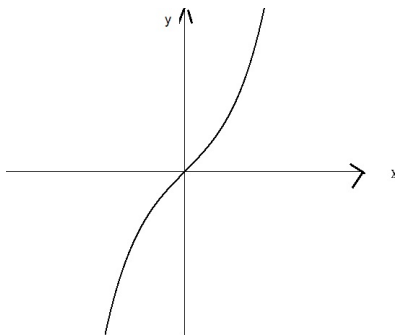


Figura 9.13: Gráfico do seno hiperbólico

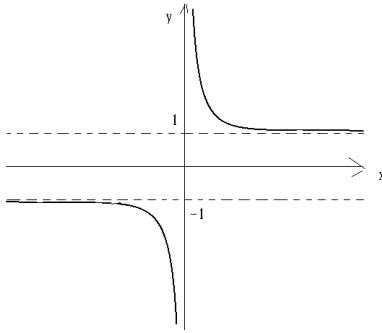


Figura 9.16: Gráfico do cotangente hiperbólico

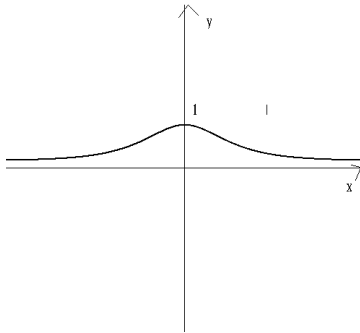


Figura 9.17: Gráfico da secante hiperbólica

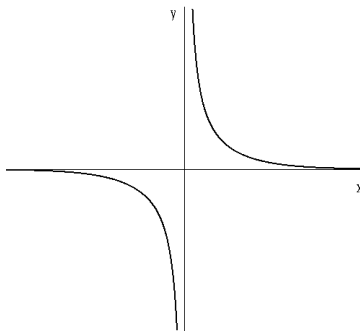


Figura 9.18: Gráfico da cosecante hiperbólica

CÁLCULO INTEGRAL

INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO, POR PARTES E POR COMPLEXIFICAÇÃO

LUÍS ANTÓNIO DE ALMEIDA VIEIRA

Sobre a obra

Nesta obra, procura-se ilustrar a aplicação dos conceitos teóricos e clarificar as técnicas utilizadas no processo do desenvolvimento dos Integrais Indefinidos, desenvolvendo os métodos de Integração por Substituição, por Partes e por Complexificação, e aludindo ainda a Integrais de algumas Funções Trigonométricas.

Os diversos conjuntos de problemas resolvidos constituem uma das partes essenciais do livro, estando-se por isso perante uma obra cujos objetivos principais são contribuir para que as matérias lecionadas nas disciplinas de Matemática se tornem mais atrativas e fazer ver ao leitor a necessidade da Matemática no desenvolvimento científico dos alunos de Engenharia.

Sobre o autor

Luís António de Almeida Vieira, Professor Auxiliar do Departamento de Engenharia Civil, licenciou-se em Matemática Aplicada no Ramo Científico na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto em 1985, tendo obtido o grau de Doutor em Matemática pela Universidade de Aveiro em 2004.

Começou, a partir de 1985, por ser Professor na Escola Secundária Clara Resende, lecionando Matemática. Continua a sua carreira como Professor de Matemática no Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, onde leciona as aulas teóricas das unidades curriculares de Análise Matemática I, Análise Matemática II, Análise Matemática VI, Introdução à Topologia, Introdução à Lógica, Álgebra Linear, e as aulas práticas das unidades curriculares de Investigação Operacional e de Análise Numérica. Em 1990, inicia a sua carreira como Professor no Departamento de Engenharia Civil da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, na Secção de Matemática, onde assume as regências das unidades de Análise Matemática I, Análise Matemática II e Álgebra Linear, e leciona as aulas práticas destas unidades e da unidade de Estatística.

Ao longo da sua carreira letiva produziu várias monografias sobre Álgebra de Jordan. Na vertente de investigação publica artigos em que pretende estabelecer uma interligação entre análise, álgebra e combinatória.

Pertence atualmente ao Centro de Matemática da Universidade do Porto (CMUP).

Também disponível em formato papel



ISBN E-Book

978-989-723-269-5

www.engebook.com

ENGEBOOK®